Induksi Matematika

Nur Hasanah, M.Cs

- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Induksi matematik dapat mengurangi langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

- Contoh :

  $p(n)$: "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $n(n + 1)/2$".

  Buktikan $p(n)$ benar!

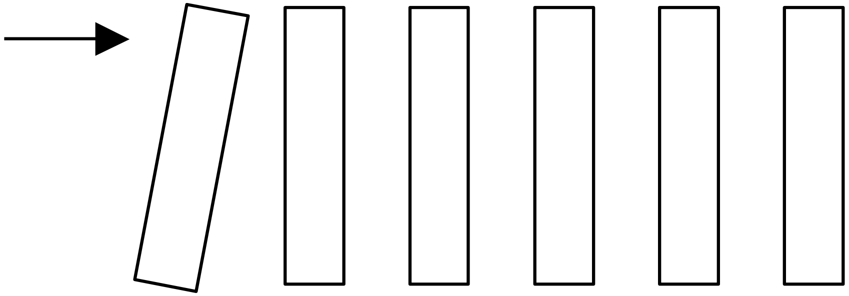
Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1. p(1) benar
  2. Jika p(n) benar, maka p(n + 1) juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

Prinsip Induksi Sederhana

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.



- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.

Contoh 1

- Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika

<u>Penyelesaian</u>:

(i) *Basis induksi*: p(1) benar, karena untuk n=1 kita peroleh:

$$1 = 1\,(1 + 1)/\,2$$
$$= 1(2)/2$$
$$= 2/2$$
$$= 1$$

(ii) Langkah induksi:

Andaikan *p*(*n*) benar, yaitu pernyataan:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$

adalah benar. Kita harus memperlihatkan bahwa *p*(*n* +1) juga benar, yaitu:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (n+1)[(n+1)+1]/2$

juga benar.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\
&=[n(n+1)/2]+(n+1) \\
&=[(n^2+n)/2]+(n+1) \\
&=[(n^2+n)/2]+[(2n+2)/2] \\
&=(n^2+3n+2)/2 \\
&=(n+1)(n+2)/2 \\
&=(n+1)[(n+1)+1]/2
\end{aligned}
$$

- Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

Contoh 2

- Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematika bahwa n^3+2n adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*: p(1) benar, karena untuk $n=1$, $1^3 + 2(1) =$, 3 adalah kelipatan 3.

(ii) Langkah induksi:

Misalkan $p(n)$ benar, yaitu:

n^3+2n adalah kelipatan 3

adalah benar. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$(n+1)^3+2(n+1)$ adalah kelipatan 3

juga benar.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3+2(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)+(2n+2) \\
&= (n^3+2n)+3n^2+3n+3 \\
&= (n^3+2n)+3(n^2+n+1)
\end{aligned}
$$

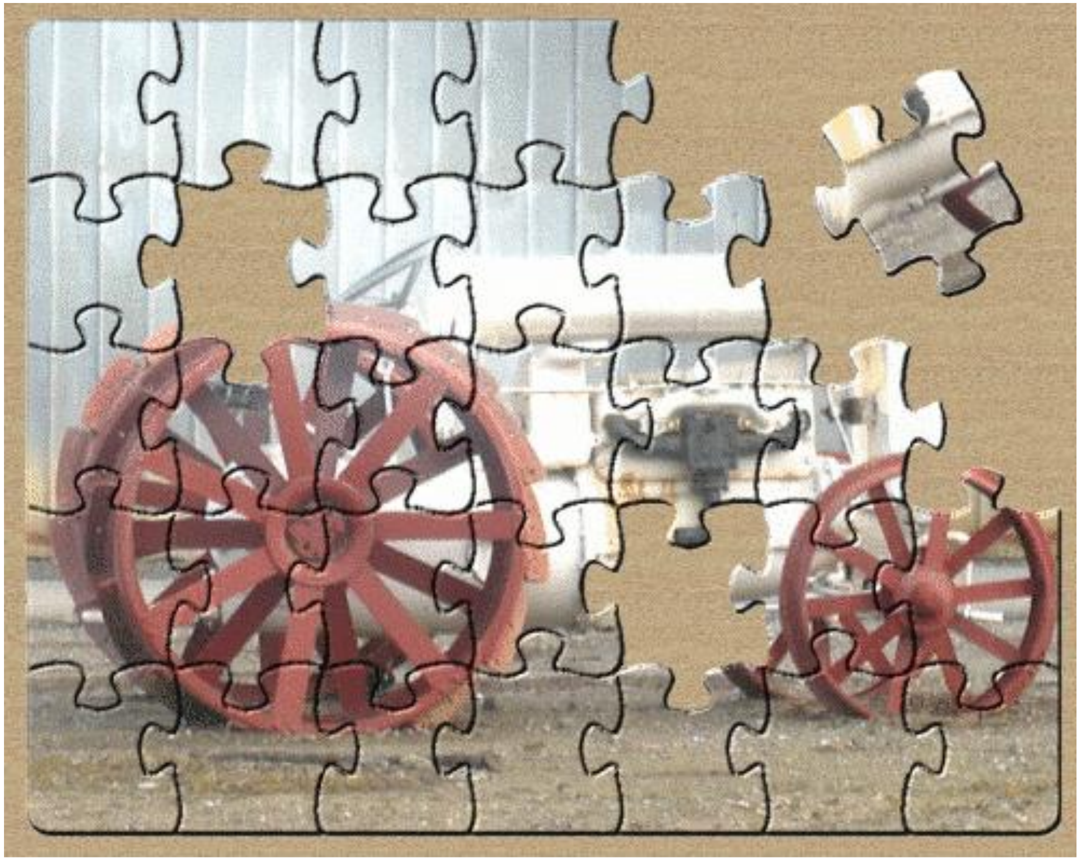
- Karena (n^3+2n) adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi) dan $3(n^2+n+1)$ juga kelipatan 3, maka $(n^3+2n)+3(n^2+n+1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3.
- Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka terbukti untuk semua $n \geq 1$, n^3+3n adalah kelipatan 3.

Prinsip Induksi Kuat

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
    1. $p(n_0)$ benar, dan
    2. Jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh

- Teka-teki susun **potongan gambar (*jigsaw puzzle*)** terdiri dari sejumlah potongan gambar. Kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar.
- Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan.
- Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah.
- Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.



Prinsip Induksi Kuat

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan (n = 1, 2, 3, …, k) diperlukan sejumlah $n – 1$ langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk $n + 1$ potongan diperlukan n langkah.

- Bagilah $n + 1$ potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 – 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah
- $(n_1 – 1) + (n_2 – 1) + 1$ langkah terakhir $= (n_1 + n_2) – 2 + 1 = n + 1 – 1 = n$.
- Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Aplikasi Induksi Matematik untuk membuktikan kebenaran program

Cuplikan algoritma di bawah ini menghitung hasil kali dua buah bilangan bulat ***a*** (≥ 0) dan ***b*** tanpa menggunakan langsung operasi perkalian, yaitu dengan cara menjumlahkan ***b*** sebanyak ***a*** kali. Hasilnya adalah ***a.b***

```
i ← 0
j ← 0
while i ≠ a do    (**)
j ← j+b
i ← i+1
endwhile
{i = a, j = ab}
```

Buktikan bahwa setiap kali eksekusi mencapai awal kalang ***while-do*** (ditandai dengan **), kita menemukan bahwa ***j = i.b***

Penyelesaian:

Tiap kali (*n*) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*	Nilai *i*	Nilai *j*
1	0	0
2	1	1.b
3	2	2.b
4	3	3.b
…	…	…
a+1	a	a.b

- Dapat disimpulkan bahwa setiap kali eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai $j = i.b$
- Misalkan *p(n)* adalah proposisi bahwa setiap kali *(n)* eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai $j_n = i_n.b$, yang dalam hal ini nilai *i* dan *j* pada eksekusi ke-*n* dinyatakan sebagai i_n dan j_n.

```
i ← 0
j ← 0
while i ≠ a do        (**)
j ← j+b
i ← i+1
endwhile
{i = a, j = ab}
```

Tiap kali (*n*) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*	**Nilai *i***	**Nilai *j***
1	0	0
2	1	1.b
3	2	2.b
4	3	3.b
…	…	…
a+1	a	a.b

(i) *Basis induksi*: *p(1)* benar, karena pertama kali (n=1) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*, *i*=0 dan *j*=0, dan bahwa nilai $j_n = i_n.b$ = 0.*b* = 0 adalah benar.

(ii) *Langkah induksi*: misalkan *p(n)* benar, yaitu asumsikan $j_n = i_n.b$ saat eksekusi mencapai awal kalang *while-do*. Kita harus menunjukkan bahwa *p(n+1)* benar, yaitu saat eksekusi mencapai awal kalang *while-do* kali untuk yang ke-(n+1) kalinya, maka $j_{n+1} = i_{n+1}.b$ juga benar.

```
i ← 0
j ← 0
while i ≠ a do    (**)
j ← j+b
i ← i+1
endwhile
{i = a, j = ab}
```

Tiap kali (*n*) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*	**Nilai *i***	**Nilai *j***
1	0	0
2	1	1.b
3	2	2.b
4	3	3.b
…	…	…
a+1	a	a.b

Kita dapat melihat bahwa nilai *i* yang baru bertambah sebesar 1 dari nilai *i* yang lama, dan nilai *j* yang baru bertambah sebesar *b* dari nilai *j* yang lama. Jadi:

$$i_{n+1} = i_n + 1$$

dan

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= j_n + b \\ &= (i_n.b) + b \\ &= (i_n + 1).b \\ &= i_{n+1}.b \end{aligned}$$

- Karena langkah 1 dan 2 keduanya sudah diperlihatkan benar, maka terbukti setiap kali eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai *j = i.b*

Referensi

- Munir, R., 2005, Matematika Diskrit, Penerbit IF, Bandung
- A. Rosen, H Kenneth (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. Mc Graw Hill.
- Siang, J.J., 2002, Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer